

QUAN HỆ (Relation)

- Khái niệm
- Quan hệ tương đương
- Quan hệ tử tự

KHÁI NIỆM

- Một quan hệ hai ngôi giữa tập A và tập B (từ A đến B) là một tập con R của tập $A \times B$
 - Nếu $(a, b) \in R$, ký hiệu $a R b$, ta nói a quan hệ R với b
 - Một quan hệ giữa A và A được gọi là quan hệ trên A

KHÁI NIỆM

- **Ví dụ 1:** Cho $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{a, b\}$
thì $R = \{(0, a), (0, b), (1, a)\}$
là một quan hệ hai ngôi giữa A và B

KHÁI NIỆM

- **Ví dụ 2:** Cho $n > 1$, định nghĩa quan hệ:

$$a R b \Leftrightarrow a - b \text{ chia hết cho } n$$

thì R là một quan hệ hai ngôn trên $\mathbb{Z}$

Quan hệ này được gọi là quan hệ đồng dư modulo n trên $\mathbb{Z}$

Nếu $a R b$ thì ta viết $a \equiv b \pmod{n}$

Với $n = 5$, $2 R 7$ vì $2 - 7$ chia hết cho 5 hay $2 \equiv 7 \pmod{5}$

QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG

- Một quan hệ hai ngôi R trên tập A có tính chất
 - **Phản xạ**: nếu $\forall x \in A \Rightarrow x R x$
 - **Đối xứng**: nếu $\forall x, y \in A, x R y \Rightarrow y R x$
 - **Bắc cầu**: nếu $\forall x, y, z \in A, x R y$ và $y R z \Rightarrow x R z$
- Quan hệ R có tính chất **phản xạ, đối xứng và bắc cầu** được gọi là **quan hệ tương đương**, ký hiệu là $\sim$; nếu $x R y$ thì ta nói x tương đương với y và viết $x \sim y$

QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG

Ví dụ 1:

- Cho quan hệ φ trên tập số thực R được xác định như sau: $\forall x, y \in R, x \varphi y \Leftrightarrow x-y \in Z$. Chứng minh φ là một quan hệ tương đương
- **Chứng minh:** φ có tính phản xạ, đối xứng, bắc cầu
 - $\forall x \in R, x-x=0 \in Z \Rightarrow x \varphi x$ (phản xạ).
 - $\forall x, y \in R$ và $x \varphi y$ thì $x-y \in Z \Rightarrow y-x \in Z \Rightarrow y \varphi x$ (đối xứng)
 - $\forall x, y, z \in R$ và $x \varphi y, y \varphi z$ thì $x-y \in Z, y-z \in Z \Rightarrow x-z = (x-y)+(y-z) \in Z \Rightarrow x \varphi z$ (bắc cầu)

QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG

- Cho R là một quan hệ tương đương trên A và $x \in A$, tập hợp $\{y \in A \mid y \sim x\}$ được gọi là lớp tương đương chứa x , ký hiệu $\bar{x}$, $x/\sim$ hay $[x]$. Tập tất cả các lớp tương đương gọi là tập thương, ký hiệu $A/\sim$
- **Ví dụ:** xét quan hệ $xRy \Leftrightarrow x - y$ nguyên, thì
 - $[x] = \{y \in A \mid y - x \text{ nguyên}\}$
 - $[1.5] = \{\dots, -1.5, -0.5, 0.5, 1.5, \dots\}$

QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG

- **Định lý 1:** Giả sử R là một quan hệ tương đương trên A khi ấy:
 - $\forall x \in A, x \in [x]$
 - $\forall x, y \in A, xRy \Leftrightarrow [x] = [y]$
 - Hai lớp tương đương của x và y sao cho $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ thì $[x] = [y]$

QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG

Ví dụ 3: Xét quan hệ $\equiv (\text{mod } 3)$ trên $\mathbb{Z}$ thì

➤ Lớp $[0] = \{\dots, -6, -3, 0, 3, \dots\}$

➤ Lớp $[1] = \{\dots, -5, -2, 1, 4, \dots\}$

➤ Lớp $[2] = \{\dots, -4, -1, 2, 5, \dots\}$

- **Lưu ý:** mọi $x \in \mathbb{Z}$ đều thuộc một trong 3 lớp trên. Tập $\mathbb{Z}$ bị phân hoạch thành 3 lớp đôi một rời nhau. $\mathbb{Z}/\sim = \{[0], [1], [2]\}$
- Khái quát: quan hệ $\equiv (\text{mod } n)$ phân hoạch $\mathbb{Z}$ thành n lớp tương đương, ký hiệu $\mathbb{Z}_n = \{[0], [1], \dots, [n-1]\}$

QUAN HỆ THỨ TỰ

- Một quan hệ hai ngôi R trên tập A có tính chất phản đối xứng nếu $\forall x, y \in A, x R y \text{ và } y R x \Rightarrow x=y$
- Quan hệ R có tính chất phản xạ, phản đối xứng và bắc cầu được gọi là quan hệ thứ tự, ký hiệu là $<$
- Nếu $x R y$ thì ta nói x "nhỏ hơn y " và viết $x < y$
- Tập A với quan hệ thứ tự R gọi là một tập có thứ tự

QUAN HỆ THỨ TỰ

Ví dụ 1:

- Quan hệ " $\leq$ " thông thường trên tập số thực $\mathbf{R}$ là một quan hệ thứ tự
- Gọi $\wp(X)$ là tập các tập con của tập X , trên $\wp(X)$ ta định nghĩa quan hệ

$$A < B \Leftrightarrow A \subset B$$

thì quan hệ " $<$ " là một quan hệ thứ tự trên $\wp(X)$ (bài tập)

QUAN HỆ THỨ TỰ

Ví dụ 2:

- Gọi R là quan hệ hai ngôi trên N xác định: $\forall m, n \in N, n R m \Leftrightarrow n|m$ (n chia hết m), chứng minh R là một quan hệ thứ tự trên N
- **Chứng minh:** R có tính phản xạ, phản đối xứng, bắc cầu
 - $\forall n \in N, n|n \Rightarrow n R n$ (phản xạ)
 - $\forall m, n \in N$ và $n R m, m R n \Rightarrow n|m, m|n$ thì $n = m$ (phản đối xứng)
 - $\forall m, n, p \in N$ và $n R m, m R p$ thì $n|m, m|p \Rightarrow n|p \Rightarrow n R p$ (bắc cầu)

QUAN HỆ THỨ TỰ

Lưu ý:

- Một quan hệ thứ tự $<$ trên A gọi là toàn phần nếu $\forall x, y \in A$ thì $x < y$ hoặc $y < x$, ngược lại gọi là quan hệ thứ tự bộ phận
- **Ví dụ:** Quan hệ " $\leq$ " trên $\mathbf{R}$ là toàn phần còn quan hệ " $|$ " (chia hết) là bộ phận

QUAN HỆ THỨ TỰ

- Cho tập A và quan hệ thứ tự $<$ trên A , giả sử $B \subset A$
 - Phần tử $m \in B$ gọi là **nhỏ nhất của B** ký hiệu $\min(B)$ nếu $\forall x \in B$ ta có $m < x$
 - Phần tử $n \in B$ gọi là **lớn nhất của B** ký hiệu $\max(B)$ nếu $\forall x \in B$ ta có $x < n$
 - Phần tử $a \in A$ gọi là một **chặn trên của B** nếu $\forall x \in B$ ta có $x < a$
 - Phần tử $b \in A$ gọi là một **chặn dưới của B** nếu $\forall x \in B$ ta có $b < x$

QUAN HỆ THỨ TỰ

Ví dụ 3:

- Cho tập $X = \{a, b, c\}$, $A = \wp(X)$ và quan hệ thứ tự trên A là:
 $\forall x, y \in A, x < y \Leftrightarrow x \subset y$ (x và y là các tập con của X)
- Xét $B = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$, thì
 - $\min(B) = \{a\}$, không có $\max(B)$
 - Chặn dưới của B là $\emptyset$ và $\{a\}$, B có một chặn trên là $\{a, b, c\}$

QUAN HỆ THỨ TỰ

- Cho tập A và quan hệ thứ tự $<$ trên A , giả sử $B \subset A$
 - Tập B được gọi là **bị chặn trên** nếu B có ít nhất một chặn trên
 - Tập B được gọi là **bị chặn dưới** nếu B có ít nhất một chặn dưới
 - Tập B được gọi là **bị chặn** nếu B vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới

QUAN HỆ THỨ TỰ

- Cho tập A và quan hệ thứ tự $<$ trên A , giả sử $B \subset A$
 - Giả sử B bị chặn trên, thì phần tử bé nhất nếu có của tập các chặn trên của B gọi là **chặn trên nhỏ nhất của B** , ký hiệu $\sup B$
 - Giả sử B bị chặn dưới, thì phần tử lớn nhất nếu có của tập các chặn dưới của B gọi là **chặn dưới lớn nhất của B** , ký hiệu $\inf B$

QUAN HỆ THỨ TỰ

Ví dụ 4:

- Cho tập $X = \{a, b, c\}$, $A = P(X)$ và quan hệ thứ tự trên A là:
$$\forall x, y \in A, x \prec y \Leftrightarrow x \subset y$$
- Xét $B = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$, thì
 - Tập các chặn trên của B là $\{\{a, b, c\}\}$, $\sup B = \{a, b, c\}$
 - Tập các chặn dưới của B là $\{\emptyset, \{a\}\}$, $\inf B = \{a\}$

QUAN HỆ THỨ TỰ

- Cho tập A và quan hệ thứ tự $<$ trên A , giả sử $B \subset A$
 - Nếu $\min(B)$ tồn tại thì $\inf B = \min(B)$
 - Nếu $\max(B)$ tồn tại thì $\sup B = \max(B)$
 - Nếu $\inf B$ tồn tại và $\inf B \in B$ thì $\min(B)$ tồn tại và $\min(B) = \inf B$
 - Nếu $\sup B$ tồn tại và $\sup B \in B$ thì $\max(B)$ tồn tại và $\max(B) = \sup B$